Varietà piatte e Teorema di Bieberbach

Candidata: Valeria Tateo

Relatore: Prof. Roberto Frigerio

Università di Pisa

Dipartimento di Matematica

13 Dicembre 2024

Obiettivi della tesi:

1. Introdurre le varietà piatte.
2. Dimostrare il Teorema di Bieberbach.
3. Classificare le superfici compatte localmente isometriche a $\mathbb{R}^2$.

Sezione 1

Varietà piatte

(X, G)-strutture

Sia X una varietà connessa, semplicemente connessa, orientata, di dimensione n e sia G un gruppo di diffeomorfismi di X su se stessa.

(X, G)-strutture

Sia X una varietà connessa, semplicemente connessa, orientata, di dimensione n e sia G un gruppo di diffeomorfismi di X su se stessa.

Definizione

Una n-varietà differenziabile M è dotata di una (X, G)-**struttura** se sono dati un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di M e un insieme di mappe aperte differenziabili $\{\varphi_i\}$ (con $\varphi_i : U_i \to X$) tali che:

- $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$ è un diffeomorfismo;
- se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, allora la restrizione di $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ ad ogni componente connessa di $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ è la restrizione di un elemento di G.

Varietà piatte

Definizione

Sia M una (X, G)-varietà di dimensione n. Allora M si dice **piatta** se $X = \mathbb{R}^n$ e $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$.

Varietà piatte

Definizione

Sia M una (X, G)-varietà di dimensione n. Allora M si dice **piatta** se $X = \mathbb{R}^n$ e $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$.

Proposizione

La definizione appena data coincide con l'essere localmente isometrica a $\mathbb{R}^n$.

Varietà piatte complete

Proposizione

Sia M una varietà piatta, connessa e semplicemente connessa e sia $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{R}^n$ un'isometria definita su U_0, aperto connesso non vuoto di M; allora esiste un'unica isometria locale $D : M \to \mathbb{R}^n$ che estende φ_0.

Varietà piatte complete

Proposizione

Sia M una varietà piatta, connessa e semplicemente connessa e sia $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{R}^n$ un'isometria definita su U_0, aperto connesso non vuoto di M; allora esiste un'unica isometria locale $D : M \to \mathbb{R}^n$ che estende φ_0.

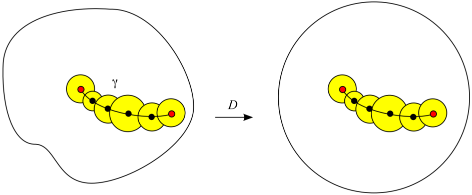
Teorema

Ogni varietà piatta, completa, connessa e semplicemente connessa è isometricamente diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Mappa Sviluppante

Definizione

La mappa descritta nella proposizione precedente è chiamata **mappa sviluppante** di M rispetto a φ_0.



Gruppo fondamentale di una varietà piatta

Teorema

Se M è una varietà piatta, completa e connessa, allora $\pi_1(M)$ si può identificare con un sottogruppo discreto di $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ che agisce in maniera libera e propriamente discontinua su $\mathbb{R}^n$ in modo che M sia isometricamente diffeomorfa a $\mathbb{R}^n/\pi_1(M)$.

Dimostrazione

- Consideriamo $p : \tilde{M} \to M$ il rivestimento universale di M.

Dimostrazione

- Consideriamo $p : \tilde{M} \to M$ il rivestimento universale di M.
- Osserviamo che $\tilde{M}$ è dotata in modo naturale di una $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n))$-struttura.

Dimostrazione

- Consideriamo $p : \tilde{M} \to M$ il rivestimento universale di M.
- Osserviamo che $\tilde{M}$ è dotata in modo naturale di una $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n))$-struttura.
- Per il Teorema di Hopf-Rinow, $\tilde{M}$ è completa.

Dimostrazione

- Consideriamo $p : \tilde{M} \to M$ il rivestimento universale di M.
- Osserviamo che $\tilde{M}$ è dotata in modo naturale di una $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n))$-struttura.
- Per il Teorema di Hopf-Rinow, $\tilde{M}$ è completa.
- Quindi $\tilde{M}$ è isometricamente diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione

- Poiché p è un rivestimento regolare, abbiamo che
$$\mathrm{Aut}(p) = \pi_1(M)/p_*(\pi_1(\tilde{M})) = \pi_1(M).$$

Dimostrazione

- Poiché p è un rivestimento regolare, abbiamo che
$$\mathrm{Aut}(p) = \pi_1(M)/p_*(\pi_1(\tilde{M})) = \pi_1(M).$$
- Segue che M è isometricamente diffeomorfa a $\mathbb{R}^n/\pi_1(M)$ e, poiché p è un'isometria locale, $\pi_1(M) < Isom(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione

- Poiché p è un rivestimento regolare, abbiamo che
$$\mathrm{Aut}(p) = \pi_1(M)/p_*(\pi_1(\tilde{M})) = \pi_1(M).$$
- Segue che M è isometricamente diffeomorfa a $\mathbb{R}^n/\pi_1(M)$ e, poiché p è un'isometria locale, $\pi_1(M) < Isom(\mathbb{R}^n)$.
- L'azione di $\pi_1(M)$ su $\mathbb{R}^n$ è libera e propriamente discontinua.

Dimostrazione

- Poiché p è un rivestimento regolare, abbiamo che
$$\mathrm{Aut}(p) = \pi_1(M)/p_*(\pi_1(\tilde{M})) = \pi_1(M).$$
- Segue che M è isometricamente diffeomorfa a $\mathbb{R}^n/\pi_1(M)$ e, poiché p è un'isometria locale, $\pi_1(M) < Isom(\mathbb{R}^n)$.
- L'azione di $\pi_1(M)$ su $\mathbb{R}^n$ è libera e propriamente discontinua.
- Dunque $\pi_1(M)$ è un sottogruppo discreto di $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$.

$\square$

Sezione 2

Teorema di Bieberbach

Gruppi di Lie

Definizione

Un gruppo di Lie è una varietà liscia G che ammette una struttura di gruppo tale che le operazioni

$$\begin{aligned} G \times G \to G, &\quad (a,b) \mapsto ab \\ G \to G, &\quad a \mapsto a^{-1} \end{aligned}$$

di moltiplicazione e inversione sono lisce.

Commutatori

Dato un gruppo G e due sottogruppi $H, K < G$, definiamo:

$$[H, K] = \langle\, [h, k] \mid h \in H,\ k \in K \rangle.$$

Posto $G_0 = G$, possiamo definire iterativamente $G_k = [G_{k-1}, G]$.

Commutatori

Dato un gruppo G e due sottogruppi $H, K < G$, definiamo:

$$[H, K] = \langle\, [h, k] \mid h \in H,\ k \in K \rangle.$$

Posto $G_0 = G$, possiamo definire iterativamente $G_k = [G_{k-1}, G]$.

Osservazione

Osserviamo che G è **abeliano** *se e solo se $G_1 = e$.*

Commutatori

Dato un gruppo G e due sottogruppi $H, K < G$, definiamo:

$$[H,K] = \langle\, [h,k] \mid h \in H,\ k \in K \rangle.$$

Posto $G_0 = G$, possiamo definire iterativamente $G_k = [G_{k-1}, G]$.

Osservazione

Osserviamo che G è **abeliano** *se e solo se $G_1 = e$.*

Definizione

Diciamo che G è **nilpotente** se $G_k = e$ per un certo k.

Lemma di Margulis

Teorema (Lemma di Margulis)

Dato G un gruppo di Lie, esiste un intorno U di $e \in G$ tale che ogni sottogruppo discreto $\Gamma < G$ generato da elementi in U è nilpotente.

Matrici ortogonali

Corollario

Sia $G = \mathrm{O}(n)$ il gruppo delle matrici ortogonali, allora esiste un intorno U di $I \in \mathrm{O}(n)$ tale che ogni sottogruppo finito $\Gamma < \mathrm{O}(n)$ generato da elementi in U è abeliano.

Isometrie di $\mathbb{R}^n$

L'omomorfismo $r : \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{O}(n)$, che manda ogni isometria nella sua parte rotazionale, induce una successione esatta

$$1 \to \mathbb{R}^n \to \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{r} \mathrm{O}(n) \to 1$$

dove indichiamo con $\mathbb{R}^n$ il gruppo delle traslazioni di $\mathbb{R}^n$.

Isometrie di $\mathbb{R}^n$

L'omomorfismo $r : \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{O}(n)$, che manda ogni isometria nella sua parte rotazionale, induce una successione esatta

$$1 \to \mathbb{R}^n \to \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{r} \mathrm{O}(n) \to 1$$

dove indichiamo con $\mathbb{R}^n$ il gruppo delle traslazioni di $\mathbb{R}^n$.
Sia adesso $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ un sottogruppo discreto. Otteniamo la seguente successione esatta

$$1 \to T \to \Gamma \to r(\Gamma) \to 1,$$

dove $T \triangleleft \Gamma$ è detto **sottogruppo delle traslazioni** di Γ.

Isometrie di $\mathbb{R}^n$

Teorema

Esiste un $N > 0$ tale che ogni sottogruppo discreto di $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ contiene un sottogruppo abeliano di indice al massimo N.

Gruppi cristallografici

Definizione

Un sottogruppo discreto $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ si dice **gruppo cristallografico** se il quoziente $\mathbb{R}^n/\Gamma$ è compatto.

Gruppi cristallografici

Definizione

Un sottogruppo discreto $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ si dice **gruppo cristallografico** se il quoziente $\mathbb{R}^n/\Gamma$ è compatto.

Proposizione

L'immagine $r(\Gamma)$ di un gruppo cristallografico è finita.

Gruppi cristallografici

Corollario

Ogni gruppo cristallografico ammette un sottogruppo delle traslazioni T di indice finito e isomorfo a $\mathbb{Z}^n$.

Dimostrazione

- Supponiamo Γ abeliano.

Dimostrazione

- Supponiamo Γ abeliano.
- Poiché $\mathbb{R}^n/\Gamma$ è compatto, Γ è finitamente generato.

Dimostrazione

- Supponiamo Γ abeliano.
- Poiché $\mathbb{R}^n/\Gamma$ è compatto, Γ è finitamente generato.
- Il rango di un gruppo abeliano finitamente generato è il rango della sua parte libera.

Dimostrazione

- Supponiamo Γ abeliano.
- Poiché $\mathbb{R}^n/\Gamma$ è compatto, Γ è finitamente generato.
- Il rango di un gruppo abeliano finitamente generato è il rango della sua parte libera.
- La parte libera di Γ è proprio T in quanto T ha indice finito.

Dimostrazione

- Supponiamo Γ abeliano.
- Poiché $\mathbb{R}^n/\Gamma$ è compatto, Γ è finitamente generato.
- Il rango di un gruppo abeliano finitamente generato è il rango della sua parte libera.
- La parte libera di Γ è proprio T in quanto T ha indice finito.
- Inoltre T è finitamente generato e libero.

Dimostrazione

- Supponiamo Γ abeliano.
- Poiché $\mathbb{R}^n/\Gamma$ è compatto, Γ è finitamente generato.
- Il rango di un gruppo abeliano finitamente generato è il rango della sua parte libera.
- La parte libera di Γ è proprio T in quanto T ha indice finito.
- Inoltre T è finitamente generato e libero.
- Segue che $\operatorname{rnk} T = \operatorname{rnk} \Gamma = n$. $\square$

Il Teorema di Bieberbach

Teorema (Bieberbach)

Se M è una varietà piatta, completa, connessa e compatta, allora è finitamente rivestita da un toro piatto.

Dimostrazione

- $M = \mathbb{R}^n/\Gamma$, dove $\Gamma = \pi_1(M)$ è un sottogruppo discreto di $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione

- $M = \mathbb{R}^n/\Gamma$, dove $\Gamma = \pi_1(M)$ è un sottogruppo discreto di $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$.
- Poiché M è compatta, Γ è un gruppo cristallografico.

Dimostrazione

- $M = \mathbb{R}^n/\Gamma$, dove $\Gamma = \pi_1(M)$ è un sottogruppo discreto di $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$.
- Poiché M è compatta, Γ è un gruppo cristallografico.
- Il corollario precedente dice che esiste un sottogruppo $T \triangleleft \Gamma$ isomorfo a $\mathbb{Z}^n$ e di indice finito.

Dimostrazione

- $M = \mathbb{R}^n/\Gamma$, dove $\Gamma = \pi_1(M)$ è un sottogruppo discreto di $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$.
- Poiché M è compatta, Γ è un gruppo cristallografico.
- Il corollario precedente dice che esiste un sottogruppo $T \triangleleft \Gamma$ isomorfo a $\mathbb{Z}^n$ e di indice finito.
- La mappa

$$\mathbb{R}^n/T = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n} \longrightarrow M = \mathbb{R}^n/\Gamma$$

è un rivestimento finito, da cui la tesi. $\square$

Sezione 3

Superfici compatte localmente isometriche a $\mathbb{R}^2$

Isometrie affini di $\mathbb{R}^2$

$\mathrm{rnk}(A-I)$	$\mathrm{rnk}(A-I\|b)$	**Punti fissi**	**Classificazione**
0	0	tutti	Identità
0	1	nessuno	Traslazione
2	2	1	Rotazione

Tabella: Isometrie dirette

Isometrie affini di $\mathbb{R}^2$

$\mathrm{rnk}(A-I)$	$\mathrm{rnk}(A-I\|b)$	**Punti fissi**	**Classificazione**
0	0	tutti	Identità
0	1	nessuno	Traslazione
2	2	1	Rotazione

Tabella: Isometrie dirette

$\mathrm{rnk}(A-I)$	$\mathrm{rnk}(A-I\|b)$	**Punti fissi**	**Classificazione**
1	1	asse	Simmetria assiale
1	2	nessuno	Riflessione traslatoria

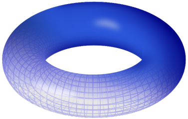
Tabella: Isometrie inverse

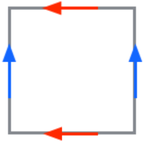
Il toro

Il toro è una superficie che si può ottenere quozientando $\mathbb{R}^2$ per l'azione di $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$, sottogruppo generato da:

$$f(x) = x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g(x) = x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}^2$.



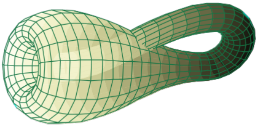


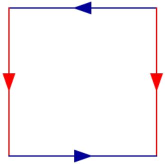
La bottiglia di Klein

La bottiglia di Klein è una superficie che si può ottenere quozientando $\mathbb{R}^2$ per l'azione di $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$, generato da:

$$f(x) = x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } g(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}^2$.





Rivestimento del toro sulla bottiglia di Klein

Osservazione

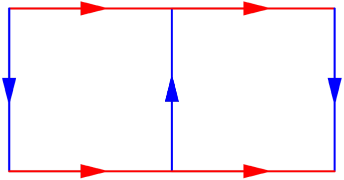
La bottiglia di Klein è una varietà compatta piatta di dimensione 2.

Rivestimento del toro sulla bottiglia di Klein

Osservazione

La bottiglia di Klein è una varietà compatta piatta di dimensione 2.

- Per il Teorema di Bieberbach, è rivestita dal toro.
- Possiamo ottenere un dominio fondamentale del toro incollando due domini per la bottiglia di Klein.



Classificazione

Teorema

Sia Σ una superficie compatta localmente isometrica a $\mathbb{R}^2$. Allora Σ è diffeomorfa al toro o alla bottiglia di Klein.

Classificazione

Teorema

Sia Σ una superficie compatta localmente isometrica a $\mathbb{R}^2$. Allora Σ è diffeomorfa al toro o alla bottiglia di Klein.

- Sia $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ che agisce in maniera libera e propriamente discontinua su $\mathbb{R}^2$.

Classificazione

Teorema

Sia Σ una superficie compatta localmente isometrica a $\mathbb{R}^2$. Allora Σ è diffeomorfa al toro o alla bottiglia di Klein.

- Sia $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ che agisce in maniera libera e propriamente discontinua su $\mathbb{R}^2$.
- Consideriamo $s : \Gamma \to \{\pm 1\}$ tale che $s(f) = \det(A)$. Si hanno due possibilità:
  a. s è banale;
  b. s è surgettivo.

Caso a.

Se l'omomorfismo s è banale, allora:

- Tutte le parti lineari di elementi di Γ hanno determinante uguale a 1.

Caso a.

Se l'omomorfismo s è banale, allora:

- Tutte le parti lineari di elementi di Γ hanno determinante uguale a 1.
- Poiché Γ agisce in maniera libera su $\mathbb{R}^2$, allora gli elementi di Γ non hanno punti fissi, cioè Γ è costituito solo di traslazioni.

Caso a.

Se l'omomorfismo s è banale, allora:

- Tutte le parti lineari di elementi di Γ hanno determinante uguale a 1.
- Poiché Γ agisce in maniera libera su $\mathbb{R}^2$, allora gli elementi di Γ non hanno punti fissi, cioè Γ è costituito solo di traslazioni.
- Quindi Γ è il gruppo delle traslazioni di vettori v_1 e v_2 linearmente indipendenti isomorfo a $\mathbb{Z}^2$ e

$$\mathbb{R}^2/\Gamma = S^1 \times S^1 \text{ è il } \textbf{toro}.$$

Caso b.

Se l'omomorfismo s è surgettivo, allora:

- $\ker(s) = T$ è un gruppo di traslazioni di indice 2.

Caso b.

Se l'omomorfismo s è surgettivo, allora:

- $\ker(s) = T$ è un gruppo di traslazioni di indice 2.
- Esiste una riflessione traslatoria $\beta \in \Gamma$ tale che

$$\beta(x) = Bx + b \text{ e } \det(B) = -1.$$

Caso b.

Se l'omomorfismo s è surgettivo, allora:

- $\ker(s) = T$ è un gruppo di traslazioni di indice 2.
- Esiste una riflessione traslatoria $\beta \in \Gamma$ tale che
$$\beta(x) = Bx + b \text{ e } \det(B) = -1.$$
- Quindi $\Gamma = T \cup \beta(T)$.

Caso b.

Se l'omomorfismo s è surgettivo, allora:

- $\ker(s) = T$ è un gruppo di traslazioni di indice 2.
- Esiste una riflessione traslatoria $\beta \in \Gamma$ tale che
$$\beta(x) = Bx + b \text{ e } \det(B) = -1.$$
- Quindi $\Gamma = T \cup \beta(T)$.
- Osserviamo che β^2 è una traslazione di vettore $2b \in T$.

Caso b.

Se l'omomorfismo s è surgettivo, allora:

- $\ker(s) = T$ è un gruppo di traslazioni di indice 2.
- Esiste una riflessione traslatoria $\beta \in \Gamma$ tale che

$$\beta(x) = Bx + b \text{ e } \det(B) = -1.$$

- Quindi $\Gamma = T \cup \beta(T)$.
- Osserviamo che β^2 è una traslazione di vettore $2b \in T$.

Obiettivo: dimostrare che $T = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(2b, w)$, dove w è un vettore perpendicolare a b.

Caso b.

- Possiamo metterci nel caso in cui
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \text{ e } w = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \text{ con } d \neq 0$$
in modo tale che $T = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(2b, w)$.

Caso b.

- Possiamo metterci nel caso in cui
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \text{ e } w = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \text{ con } d \neq 0$$
in modo tale che $T = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(2b, w)$.
- Sia adesso
$$c = w - B(w) = \begin{pmatrix} 2d \\ 0 \end{pmatrix} \in T.$$

Caso b.

- Possiamo metterci nel caso in cui
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \text{ e } \ w = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \text{ con } d \neq 0$$
in modo tale che $T = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(2b, w)$.
- Sia adesso
$$c = w - B(w) = \begin{pmatrix} 2d \\ 0 \end{pmatrix} \in T.$$
- Si ha che $\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(2b, c)$ ha indice 2 in $T = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(2b, w)$.

Caso b.

- Se $\frac{c}{2} \notin T$, allora con un po' di conti si trova un assurdo!

Caso b.

- Se $\dfrac{c}{2} \notin T$, allora con un po' di conti si trova un assurdo!
- Se $\dfrac{c}{2} \in T$, potevamo scegliere $w = \dfrac{c}{2} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$: ci siamo ricondotti al caso in cui Γ è generato da una riflessione traslatoria β e da una traslazione $\dfrac{c}{2}$ perpendicolare all'asse della riflessione, cioè

$\mathbb{R}^2/\Gamma$ è una **bottiglia di Klein**.

$\square$

Bibliografia

- R. Benedetti e C. Petronio, Lectures on hyperbolic geometry, Universitex, 1992.
- B. Martelli, Lezioni di geometria iperbolica, 2012.
- B. Martelli, An introduction to geometric topology, 2023.
- G. Mezzedimi, Il Teorema di Bieberbach, 2018.
- D. Perrone, Un'introduzione alla geometria riemanniana (seconda edizione), Ese Salento University Publishing, Quaderni di Matematica, 2023.
- W.P.Thurston, Three-dimensional geometry and topology (volume 1), PRINCETON UNIVERSITY PRESS, 1997.